

## Basic Concepts and Definitions

1] The general form of P.D.E of  $2^{th}$  order in 2-variables:

$$P(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

or

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

2] Types of  $2^{th}$  order P.D.E:

1] Linear  $2^{th}$  order P.D.E:

- if  $A, B, C, D, E, F, G$  are Functions in  $(x, y)$  or Constants.

$$A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} + D(x, y) u_x + E(x, y) u_y + F(x, y) u = G(x, y)$$

2] SemiLinear  $2^{th}$  order P.D.E:

- if  $A, B, C, D, E$  are Functions in  $(x, y)$  or Constants

$F, G$  are non linear Function in  $(u)$  i.e.  $[u^2, u^3, \sin u, e^u, \dots]$

$$A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} + D(x, y) u_x + E(x, y) u_y = G(x, y, u) \rightarrow \text{شروط لا تكون } u \text{ فقط}$$

3] Almost Linear  $2^{th}$  order P.D.E:

- if highest derivative  $\rightarrow$  Linear and lower derivative  $\rightarrow$  Non Linear in  $(u_x)$  or  $(u_y)$

$$(A(x, y) u_{xx} + B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy}) + (G(x, y, u, u_x, u_y)) = 0$$

$\downarrow$  highest derivative                       $\downarrow$  lower derivative

4] Quasi Linear  $2^{th}$  order P.D.E:

- if

$$A(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + B(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + C(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

5] Non Linear  $2^{th}$  order P.D.E:

- if it is neither Linear nor semiLinear nor almost nor Quasi Linear  
كانت  $u$  degree  $2$  ،  $3$  ،  $4$  ،  $5$  ،  $6$  ،  $7$  ،  $8$  ،  $9$  ،  $10$  ،  $11$  ،  $12$  ،  $13$  ،  $14$  ،  $15$  ،  $16$  ،  $17$  ،  $18$  ،  $19$  ،  $20$  ،  $21$  ،  $22$  ،  $23$  ،  $24$  ،  $25$  ،  $26$  ،  $27$  ،  $28$  ،  $29$  ،  $30$  ،  $31$  ،  $32$  ،  $33$  ،  $34$  ،  $35$  ،  $36$  ،  $37$  ،  $38$  ،  $39$  ،  $40$  ،  $41$  ،  $42$  ،  $43$  ،  $44$  ،  $45$  ،  $46$  ،  $47$  ،  $48$  ،  $49$  ،  $50$  ،  $51$  ،  $52$  ،  $53$  ،  $54$  ،  $55$  ،  $56$  ،  $57$  ،  $58$  ،  $59$  ،  $60$  ،  $61$  ،  $62$  ،  $63$  ،  $64$  ،  $65$  ،  $66$  ،  $67$  ،  $68$  ،  $69$  ،  $70$  ،  $71$  ،  $72$  ،  $73$  ،  $74$  ،  $75$  ،  $76$  ،  $77$  ،  $78$  ،  $79$  ،  $80$  ،  $81$  ،  $82$  ،  $83$  ،  $84$  ،  $85$  ،  $86$  ،  $87$  ،  $88$  ،  $89$  ،  $90$  ،  $91$  ،  $92$  ،  $93$  ،  $94$  ،  $95$  ،  $96$  ،  $97$  ،  $98$  ،  $99$  ،  $100$  ،  $101$  ،  $102$  ،  $103$  ،  $104$  ،  $105$  ،  $106$  ،  $107$  ،  $108$  ،  $109$  ،  $110$  ،  $111$  ،  $112$  ،  $113$  ،  $114$  ،  $115$  ،  $116$  ،  $117$  ،  $118$  ،  $119$  ،  $120$  ،  $121$  ،  $122$  ،  $123$  ،  $124$  ،  $125$  ،  $126$  ،  $127$  ،  $128$  ،  $129$  ،  $130$  ،  $131$  ،  $132$  ،  $133$  ،  $134$  ،  $135$  ،  $136$  ،  $137$  ،  $138$  ،  $139$  ،  $140$  ،  $141$  ،  $142$  ،  $143$  ،  $144$  ،  $145$  ،  $146$  ،  $147$  ،  $148$  ،  $149$  ،  $150$  ،  $151$  ،  $152$  ،  $153$  ،  $154$  ،  $155$  ،  $156$  ،  $157$  ،  $158$  ،  $159$  ،  $160$  ،  $161$  ،  $162$  ،  $163$  ،  $164$  ،  $165$  ،  $166$  ،  $167$  ،  $168$  ،  $169$  ،  $170$  ،  $171$  ،  $172$  ،  $173$  ،  $174$  ،  $175$  ،  $176$  ،  $177$  ،  $178$  ،  $179$  ،  $180$  ،  $181$  ،  $182$  ،  $183$  ،  $184$  ،  $185$  ،  $186$  ،  $187$  ،  $188$  ،  $189$  ،  $190$  ،  $191$  ،  $192$  ،  $193$  ،  $194$  ،  $195$  ،  $196$  ،  $197$  ،  $198$  ،  $199$  ،  $200$  ،  $201$  ،  $202$  ،  $203$  ،  $204$  ،  $205$  ،  $206$  ،  $207$  ،  $208$  ،  $209$  ،  $210$  ،  $211$  ،  $212$  ،  $213$  ،  $214$  ،  $215$  ،  $216$  ،  $217$  ،  $218$  ،  $219$  ،  $220$  ،  $221$  ،  $222$  ،  $223$  ،  $224$  ،  $225$  ،  $226$  ،  $227$  ،  $228$  ،  $229$  ،  $230$  ،  $231$  ،  $232$  ،  $233$  ،  $234$  ،  $235$  ،  $236$  ،  $237$  ،  $238$  ،  $239$  ،  $240$  ،  $241$  ،  $242$  ،  $243$  ،  $244$  ،  $245$  ،  $246$  ،  $247$  ،  $248$  ،  $249$  ،  $250$  ،  $251$  ،  $252$  ،  $253$  ،  $254$  ،  $255$  ،  $256$  ،  $257$  ،  $258$  ،  $259$  ،  $260$  ،  $261$  ،  $262$  ،  $263$  ،  $264$  ،  $265$  ،  $266$  ،  $267$  ،  $268$  ،  $269$  ،  $270$  ،  $271$  ،  $272$  ،  $273$  ،  $274$  ،  $275$  ،  $276$  ،  $277$  ،  $278$  ،  $279$  ،  $280$  ،  $281$  ،  $282$  ،  $283$  ،  $284$  ،  $285$  ،  $286$  ،  $287$  ،  $288$  ،  $289$  ،  $290$  ،  $291$  ،  $292$  ،  $293$  ،  $294$  ،  $295$  ،  $296$  ،  $297$  ،  $298$  ،  $299$  ،  $300$  ،  $301$  ،  $302$  ،  $303$  ،  $304$  ،  $305$  ،  $306$  ،  $307$  ،  $308$  ،  $309$  ،  $310$  ،  $311$  ،  $312$  ،  $313$  ،  $314$  ،  $315$  ،  $316$  ،  $317$  ،  $318$  ،  $319$  ،  $320$  ،  $321$  ،  $322$  ،  $323$  ،  $324$  ،  $325$  ،  $326$  ،  $327$  ،  $328$  ،  $329$  ،  $330$  ،  $331$  ،  $332$  ،  $333$  ،  $334$  ،  $335$  ،  $336$  ،  $337$  ،  $338$  ،  $339$  ،  $340$  ،  $341$  ،  $342$  ،  $343$  ،  $344$  ،  $345$  ،  $346$  ،  $347$  ،  $348$  ،  $349$  ،  $350$  ،  $351$  ،  $352$  ،  $353$  ،  $354$  ،  $355$  ،  $356$  ،  $357$  ،  $358$  ،  $359$  ،  $360$  ،  $361$  ،  $362$  ،  $363$  ،  $364$  ،  $365$  ،  $366$  ،  $367$  ،  $368$  ،  $369$  ،  $370$  ،  $371$  ،  $372$  ،  $373$  ،  $374$  ،  $375$  ،  $376$  ،  $377$  ،  $378$  ،  $379$  ،  $380$  ،  $381$  ،  $382$  ،  $383$  ،  $384$  ،  $385$  ،  $386$  ،  $387$  ،  $388$  ،  $389$  ،  $390$  ،  $391$  ،  $392$  ،  $393$  ،  $394$  ،  $395$  ،  $396$  ،  $397$  ،  $398$  ،  $399$  ،  $400$  ،  $401$  ،  $402$  ،  $403$  ،  $404$  ،  $405$  ،  $406$  ،  $407$  ،  $408$  ،  $409$  ،  $410$  ،  $411$  ،  $412$  ،  $413$  ،  $414$  ،  $415$  ،  $416$  ،  $417$  ،  $418$  ،  $419$  ،  $420$  ،  $421$  ،  $422$  ،  $423$  ،  $424$  ،  $425$  ،  $426$  ،  $427$  ،  $428$  ،  $429$  ،  $430$  ،  $431$  ،  $432$  ،  $433$  ،  $434$  ،  $435$  ،  $436$  ،  $437$  ،  $438$  ،  $439$  ،  $440$  ،  $441$  ،  $442$  ،  $443$  ،  $444$  ،  $445$  ،  $446$  ،  $447$  ،  $448$  ،  $449$  ،  $450$  ،  $451$  ،  $452$  ،  $453$  ،  $454$  ،  $455$  ،  $456$  ،  $457$  ،  $458$  ،  $459$  ،  $460$  ،  $461$  ،  $462$  ،  $463$  ،  $464$  ،  $465$  ،  $466$  ،  $467$  ،  $468$  ،  $469$  ،  $470$  ،  $471$  ،  $472$  ،  $473$  ،  $474$  ،  $475$  ،  $476$  ،  $477$  ،  $478$  ،  $479$  ،  $480$  ،  $481$  ،  $482$  ،  $483$  ،  $484$  ،  $485$  ،  $486$  ،  $487$  ،  $488$  ،  $489$  ،  $490$  ،  $491$  ،  $492$  ،  $493$  ،  $494$  ،  $495$  ،  $496$  ،  $497$  ،  $498$  ،  $499$  ،  $500$  ،  $501$  ،  $502$  ،  $503$  ،  $504$  ،  $505$  ،  $506$  ،  $507$  ،  $508$  ،  $509$  ،  $510$  ،  $511$  ،  $512$  ،  $513$  ،  $514$  ،  $515$  ،  $516$  ،  $517$  ،  $518$  ،  $519$  ،  $520$  ،  $521$  ،  $522$  ،  $523$  ،  $524$  ،  $525$  ،  $526$  ،  $527$  ،  $528$  ،  $529$  ،  $530$  ،  $531$  ،  $532$  ،  $533$  ،  $534$  ،  $535$  ،  $536$  ،  $537$  ،  $538$  ،  $539$  ،  $540$  ،  $541$  ،  $542$  ،  $543$  ،  $544$  ،  $545$  ،  $546$  ،  $547$  ،  $548$  ،  $549$  ،  $550$  ،  $551$  ،  $552$  ،  $553$  ،  $554$  ،  $555$  ،  $556$  ،  $557$  ،  $558$  ،  $559$  ،  $560$  ،  $561$  ،  $562$  ،  $563$  ،  $564$  ،  $565$  ،  $566$  ،  $567$  ،  $568$  ،  $569$  ،  $570$  ،  $571$  ،  $572$  ،  $573$  ،  $574$  ،  $575$  ،  $576$  ،  $577$  ،  $578$  ،  $579$  ،  $580$  ،  $581$  ،  $582$  ،  $583$  ،  $584$  ،  $585$  ،  $586$  ،  $587$  ،  $588$  ،  $589$  ،  $590$  ،  $591$  ،  $592$  ،  $593$  ،  $594$  ،  $595$  ،  $596$  ،  $597$  ،  $598$  ،  $599$  ،  $600$  ،  $601$  ،  $602$  ،  $603$  ،  $604$  ،  $605$  ،  $606$  ،  $607$  ،  $608$  ،  $609$  ،  $610$  ،  $611$  ،  $612$  ،  $613$  ،  $614$  ،  $615$  ،  $616$  ،  $617$  ،  $618$  ،  $619$  ،  $620$  ،  $621$  ،  $622$  ،  $623$  ،  $624$  ،  $625$  ،  $626$  ،  $627$  ،  $628$  ،  $629$  ،  $630$  ،  $631$  ،  $632$  ،  $633$  ،  $634$  ،  $635$  ،  $636$  ،  $637$  ،  $638$  ،  $639$  ،  $640$  ،  $641$  ،  $642$  ،  $643$  ،  $644$  ،  $645$  ،  $646$  ،  $647$  ،  $648$  ،  $649$  ،  $650$  ،  $651$  ،  $652$  ،  $653$  ،  $654$  ،  $655$  ،  $656$  ،  $657$  ،  $658$  ،  $659$  ،  $660$  ،  $661$  ،  $662$  ،  $663$  ،  $664$  ،  $665$  ،  $666$  ،  $667$  ،  $668$  ،  $669$  ،  $670$  ،  $671$  ،  $672$  ،  $673$  ،  $674$  ،  $675$  ،  $676$  ،  $677$  ،  $678$  ،  $679$  ،  $680$  ،  $681$  ،  $682$  ،  $683$  ،  $684$  ،  $685$  ،  $686$  ،  $687$  ،  $688$  ،  $689$  ،  $690$  ،  $691$  ،  $692$  ،  $693$  ،  $694$  ،  $695$  ،  $696$  ،  $697$  ،  $698$  ،  $699$  ،  $700$  ،  $701$  ،  $702$  ،  $703$  ،  $704$  ،  $705$  ،  $706$  ،  $707$  ،  $708$  ،  $709$  ،  $710$  ،  $711$  ،  $712$  ،  $713$  ،  $714$  ،  $715$  ،  $716$  ،  $717$  ،  $718$  ،  $719$  ،  $720$  ،  $721$  ،  $722$  ،  $723$  ،  $724$  ،  $725$  ،  $726$  ،  $727$  ،  $728$  ،  $729$  ،  $730$  ،  $731$  ،  $732$  ،  $733$  ،  $734$  ،  $735$  ،  $736$  ،  $737$  ،  $738$  ،  $739$  ،  $740$  ،  $741$  ،  $742$  ،  $743$  ،  $744$  ،  $745$  ،  $746$  ،  $747$  ،  $748$  ،  $749$  ،  $750$  ،  $751$  ،  $752$  ،  $753$  ،  $754$  ،  $755$  ،  $756$  ،  $757$  ،  $758$  ،  $759$  ،  $760$  ،  $761$  ،  $762$  ،  $763$  ،  $764$  ،  $765$  ،  $766$  ،  $767$  ،  $768$  ،  $769$  ،  $770$  ،  $771$  ،  $772$  ،  $773$  ،  $774$  ،  $775$  ،  $776$  ،  $777$  ،  $778$  ،  $779$  ،  $780$  ،  $781$  ،  $782$  ،  $783$  ،  $784$  ،  $785$  ،  $786$  ،  $787$  ،  $788$  ،  $789$  ،  $790$  ،  $791$  ،  $792$  ،  $793$  ،  $794$  ،  $795$  ،  $796$  ،  $797$  ،  $798$  ،  $799$  ،  $800$  ،  $801$  ،  $802$  ،  $803$  ،  $804$  ،  $805$  ،  $806$  ،  $807$  ،  $808$  ،  $809$  ،  $810$  ،  $811$  ،  $812$  ،  $813$  ،  $814$  ،  $815$  ،  $816$  ،  $817$  ،  $818$  ،  $819$  ،  $820$  ،  $821$  ،  $822$  ،  $823$  ،  $824$  ،  $825$  ،  $826$  ،  $827$  ،  $828$  ،  $829$  ،  $830$  ،  $831$  ،  $832$  ،  $833$  ،  $834$  ،  $835$  ،  $836$  ،  $837$  ،  $838$  ،  $839$  ،  $840$  ،  $841$  ،  $842$  ،  $843$  ،  $844$  ،  $845$  ،  $846$  ،  $847$  ،  $848$  ،  $849$  ،  $850$  ،  $851$  ،  $852$  ،  $853$  ،  $854$  ،  $855$  ،  $856$  ،  $857$  ،  $858$  ،  $859$  ،  $860$  ،  $861$  ،  $862$  ،  $863$  ،  $864$  ،  $865$  ،  $866$  ،  $867$  ،  $868$  ،  $869$  ،  $870$  ،  $871$  ،  $872$  ،  $873$  ،  $874$  ،  $875$  ،  $876$  ،  $877$  ،  $878$  ،  $879$  ،  $880$  ،  $881$  ،  $882$  ،  $883$  ،  $884$  ،  $885$  ،  $886$  ،  $887$  ،  $888$  ،  $889$  ،  $890$  ،  $891$  ،  $892$  ،  $893$  ،  $894$  ،  $895$  ،  $896$  ،  $897$  ،  $898$  ،  $899$  ،  $900$  ،  $901$  ،  $902$  ،  $903$  ،  $904$  ،  $905$  ،  $906$  ،  $907$  ،  $908$  ،  $909$  ،  $910$  ،  $911$  ،  $912$  ،  $913$  ،  $914$  ،  $915$  ،  $916$  ،  $917$  ،  $918$  ،  $919$  ،  $920$  ،  $921$  ،  $922$  ،  $923$  ،  $924$  ،  $925$  ،  $926$  ،  $927$  ،  $928$  ،  $929$  ،  $930$  ،  $931$  ،  $932$  ،  $933$  ،  $934$  ،  $935$  ،  $936$  ،  $937$  ،  $938$  ،  $939$  ،  $940$  ،  $941$  ،  $942$  ،  $943$  ،  $944$  ،  $945$  ،  $946$  ،  $947$  ،  $948$  ،  $949$  ،  $950$  ،  $951$  ،  $952$  ،  $953$  ،  $954$  ،  $955$  ،  $956$  ،  $957$  ،  $958$  ،  $959$  ،  $960$  ،  $961$  ،  $962$  ،  $963$  ،  $964$  ،  $965$  ،  $966$  ،  $967$  ،  $968$  ،  $969$  ،  $970$  ،  $971$  ،  $972$  ،  $973$  ،  $974$  ،  $975$  ،  $976$  ،  $977$  ،  $978$  ،  $979$  ،  $980$  ،  $981$  ،  $982$  ،  $983$  ،  $984$  ،  $985$  ،  $986$  ،  $987$  ،  $988$  ،  $989$  ،  $990$  ،  $991$  ،  $992$  ،  $993$  ،  $994$  ،  $995$  ،  $996$  ،  $997$  ،  $998$  ،  $999$  ،  $1000$  ،  $1001$  ،  $1002$  ،  $1003$  ،  $1004$  ،  $1005$  ،  $1006$  ،  $1007$  ،  $1008$  ،  $1009$  ،  $1010$  ،  $1011$  ،  $1012$  ،  $1013$  ،  $1014$  ،  $1015$  ،  $1016$  ،  $1017$  ،  $1018$  ،  $1019$  ،  $1020$  ،  $1021$  ،  $1022$  ،  $1023$  ،  $1024$  ،  $1025$  ،  $1026$  ،  $1027$  ،  $1028$  ،  $1029$  ،  $1030$  ،  $1031$  ،  $1032$  ،  $1033$  ،  $1034$  ،  $1035$  ،  $1036$  ،  $1037$  ،  $1038$  ،  $1039$  ،  $1040$  ،  $1041$  ،  $1042$  ،  $1043$  ،  $1044$  ،  $1045$  ،  $1046$  ،  $1047$  ،  $1048$  ،  $1049$  ،  $1050$  ،  $1051$  ،  $1052$  ،  $1053$  ،  $1054$  ،  $1055$  ،  $1056$  ،  $1057$  ،  $1058$  ،  $1059$  ،  $1060$  ،  $1061$  ،  $1062$  ،  $1063$  ،  $1064$  ،  $1065$  ،  $1066$  ،  $1067$  ،  $1068$  ،  $1069$  ،  $1070$  ،  $1071$  ،  $1072$  ،  $1073$  ،  $1074$  ،  $1075$  ،  $1076$  ،  $1077$  ،  $1078$  ،  $1079$  ،  $1080$  ،  $1081$  ،  $1082$  ،  $1083$  ،  $1084$  ،  $1085$  ،  $1086$  ،  $1087$  ،  $1088$  ،  $1089$  ،  $1090$  ،  $1091$  ،  $1092$  ،  $1093$  ،  $1094$  ،  $1095$  ،  $1096$  ،  $1097$  ،  $1098$  ،  $1099$  ،  $1100$  ،  $1101$  ،  $1102$  ،  $1103$  ،  $110$

## Vector operators:

### 1) Nabla (Delta) [Del]:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

### 2) Gradient [Grad]:

$$\text{Grad}(P) = \nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} \quad \text{where } P \text{ is scalar field}$$

$$\nabla(gP) = P(\nabla g) + g(\nabla P)$$

$$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{v} + (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{u} + \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{u})$$

### 3) Divergence [Div]:

$$\text{Div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- where  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  is vector field

$$\nabla(P \cdot \vec{v}) = P(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\nabla \cdot P)$$

- If  $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow$  [Solenoidal vector field]

$$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{v}(\nabla \times \vec{u}) - \vec{u}(\nabla \times \vec{v})$$

or [Incompressible vector field]

### 4) [Curl] Rotation:

$$\text{Curl}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

- If  $\nabla \times \vec{v} = 0 \rightarrow$  [Irrotational vector field]

$$\nabla \times (P \cdot \vec{v}) = (\nabla P) \times \vec{v} + P(\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}$$

### 5) Directional derivative:

the directional derivative of a scalar field  $P(x, y, z)$  in the direction  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

is defined as:  $\vec{a} \cdot \text{Grad}(P) = (\vec{a} \cdot \nabla) P = a_x \frac{\partial P}{\partial x} + a_y \frac{\partial P}{\partial y} + a_z \frac{\partial P}{\partial z}$

this gives the rate of change of  $P$  in the direction of  $\vec{a}$

### 6) Laplacian:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- If  $\Delta \phi = 0 \rightarrow \therefore \phi$  is harmonic function

### 7) Product Rules:

$$\nabla(Pg) = P \nabla g + g \nabla P$$

$$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u}$$

$$\nabla(P \cdot \vec{v}) = P(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\nabla \cdot P)$$

$$\nabla(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v}(\nabla \times \vec{u}) - \vec{u}(\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \times (P \cdot \vec{v}) = (\nabla P) \times \vec{v} + P(\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v}$$

1] For each of the following, state whether the partial differential equation is linear, quasi-linear or non linear. If it is linear, state whether it is homogeneous or non homogeneous and gives its order

A  $u_{xx} + x u_y = y$

Linear - Non homogeneous - order = 2 - Degree = 1

B  $u u_x - 2xy u_y = 0$

Quasi-linear - order = 1 - Degree = 1

C  $u_x^2 + u u_y = 1$

Non-linear - order = 1 - Degree = 2

D  $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$

Linear - homogeneous - order = 4 - Degree = 1

E  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

Linear - non homogeneous - order = 2 - Degree = 1

F  $u_{xxx} + u_{xyy} + \log u = 0$

Semi-linear - order = 3 - Degree = 1

G  $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin u = e^y$

Non-linear - order = 2 - Degree = 2

H  $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$

almost-linear - order = 3 - Degree = 1

2] verify that the functions  $u(x,y) = x^2 - y^2$ ,  $u(x,y) = e^x \sin y$ ,  $u(x,y) = 2xy$  are the solutions of the equation  $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Solution

①  $u(x,y) = x^2 - y^2$

$u_x = 2x$ ,  $u_{xx} = 2$ ,  $u_y = -2y$ ,  $u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$

②  $u(x,y) = e^x \sin y$

$u_x = e^x \sin y$ ,  $u_{xx} = e^x \sin y$ ,  $u_y = e^x \cos y$ ,  $u_{yy} = -e^x \sin y$

$u_{xx} + u_{yy} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$

③  $u(x,y) = 2xy$

$u_x = 2y$ ,  $u_{xx} = 0$ ,  $u_y = 2x$ ,  $u_{yy} = 0$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$

[3] Show that  $u = f(xy)$ , where  $f$  is an arbitrary differentiable function satisfies  $xu_x - yu_y = 0$  and verify that the functions  $\sin(xy)$ ,  $\cos(xy)$ ,  $\ln(xy)$ ,  $e^{xy}$  are solutions.

Solution

①  $u = f(z)$  ,  $z = xy$

$$u_x = u_z \cdot z_x \quad , \quad z_x = y \quad \longrightarrow \quad u_x = y \cdot u_z$$

$$u_y = u_z \cdot z_y \quad , \quad z_y = x \quad \longrightarrow \quad u_y = x \cdot u_z$$

$$xu_x - yu_y = xy u_z - xy u_z = 0$$

② if  $u = \sin(xy)$

$$u_x = y \cos(xy) \quad , \quad u_y = x \cos(xy)$$

$$xu_x - yu_y = xy \cos(xy) - xy \cos(xy) = 0$$

③ if  $u = \cos(xy)$

$$u_x = -y \sin(xy) \quad , \quad u_y = -x \sin(xy)$$

$$xu_x - yu_y = -xy \sin(xy) + xy \sin(xy) = 0$$

④ if  $u = \ln(xy)$

$$u_x = \frac{1}{x} \quad , \quad u_y = \frac{1}{y}$$

$$xu_x - yu_y = x \cdot \frac{1}{x} - y \cdot \frac{1}{y} = 0$$

⑤ if  $u = e^{xy}$

$$u_x = y e^{xy} \quad , \quad u_y = x e^{xy}$$

$$xu_x - yu_y = xy e^{xy} - xy e^{xy} = 0$$

[4] Show that  $u = f(x) \cdot g(y)$  where  $f$  and  $g$  are arbitrary twice differentiable functions satisfies  $u u_{xy} - u_x u_y = 0$ .

Solution

$$u_x = g \cdot f_x \quad , \quad u_y = f \cdot g_y \quad , \quad u_{xy} = f_x \cdot g_y$$

$$u \cdot u_{xy} - u_x \cdot u_y = f \cdot g \cdot f_x \cdot g_y - g \cdot f_x \cdot f \cdot g_y = 0$$